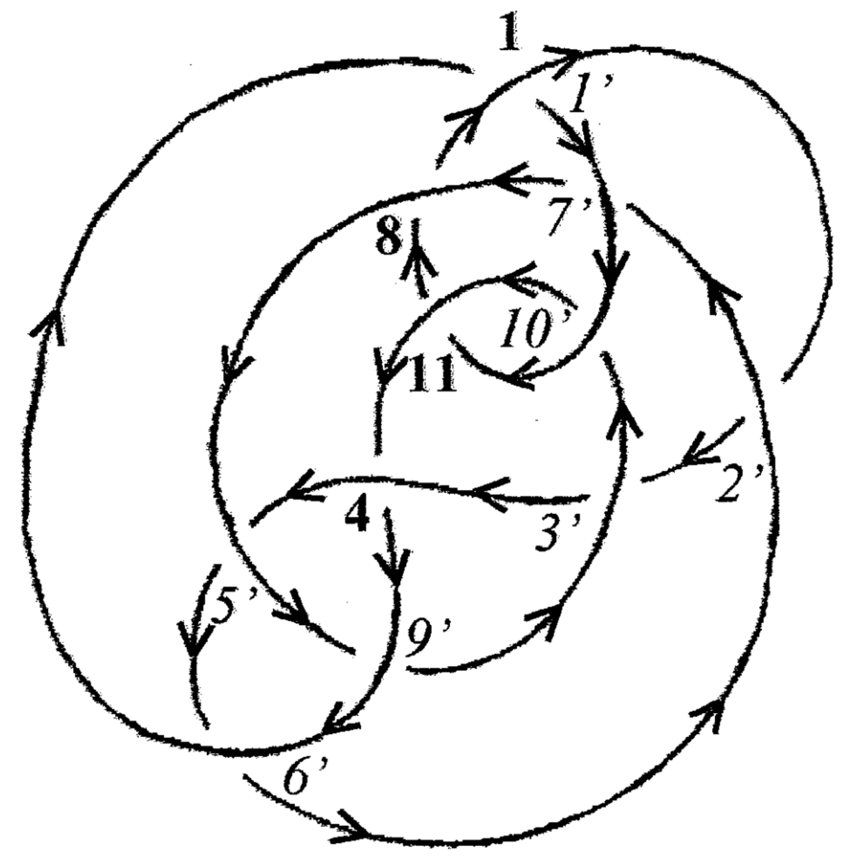
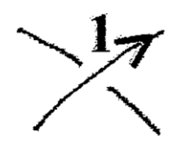
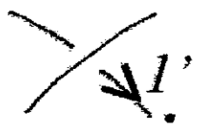
I. trajets dans l'état : bouclettes d'états

lorsqu'un état réduit est dessiné, on peut quitter un croisement quelconque et y retourner en un nombre fini de pas, représentés par les croisements intermédiaires rencontrés pendant le périple. ces trajets forment une bouclette, le croisement considéré étant le croisement commun de deux bouclettes qui constituent les deux trajets opposés formés à partir de lui. nous parlerons de trajets boucletés, que nous nommerons bouclets.

voici un état et un tel périple

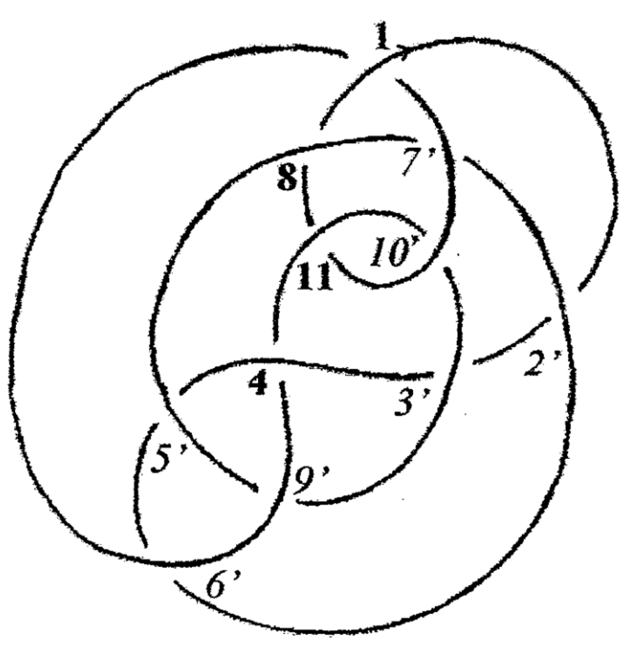


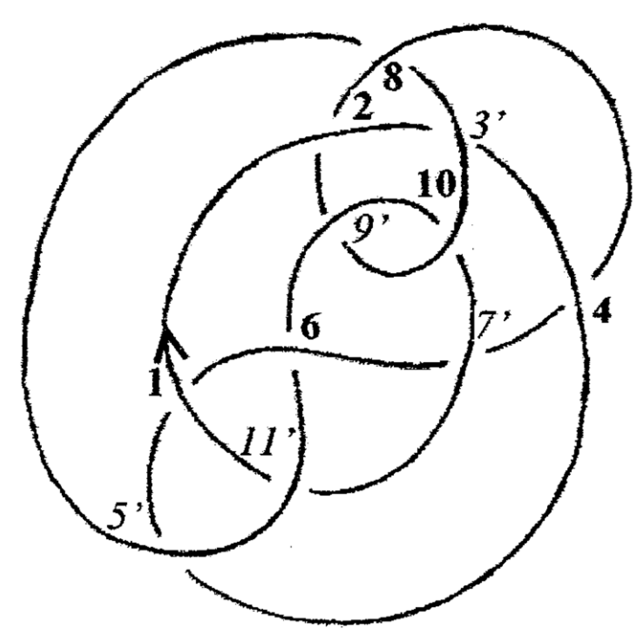
dans l'exemple, ayant choisi l'une des deux directions du parcours, le bouclet, à partir du croisement **1***1'*, démarre en **1** brin *Dessus* et aboutit en *1'* brin *dessous*.

de **1** à *1'* le bouclet rencontre 17 croisements, dont certains deux fois. le croisement **1***1'* est compté une seule fois car le départ désigné par **1** se situe *après* le croisement lui-même  et l'arrivée se situe elle aussi *après* le brin du Dessus **1** .

pour faciliter la lecture des bouclets, il est loisible de numéroter les croisements dans l'ordre de leur première rencontre après en avoir choisi un comme point de départ.

voici de tels codages des croisements à partir d'**1** : les chiffres primés indiquent le premier passage des croisements par le brin *dessous*.





le sens de lecture est donc donné par les mots :

1*2'3'***4***5'6'***2***7'***8 5***9'***3***10'***11***4'***9 6***1'***7 10***11'8'***(1**

1 2*3'***4***5'1'***6***7'4'***8***2'9'***10 3***8'***5 11***6'***9***10'***7***11'***(1**

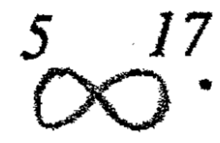
comptage des bouclets

il y a deux manières de compter les bouclets :

comptage sur l'état

il est donné sur le dessin de présentation du périple **1***1'*. on part de **1** – le sens du parcours est indifférent, mais on en choisit un pour commencer – pour aboutir à *1'*. le comptage donne : *b*(**1***1'*) = *17* selon une direction et *b*(**1***1'*) = *5* selon la direction opposée ; si l'on part de *1'* on compte *b* (*1'***1**) = 5 selon la première direction et *b (1'***1***)* = *17* selon la seconde.

pour chaque direction on effectue la somme des deux bouclets opposés : $b(\mathbf{1}) + b(1') = 17 + 5 = 22$, soit 2 fois le nombre **c** des croisements de l'état. on peut assimiler les bouclets **1***1'* à un tortillon

pour lequel les bouclettes auraient respectivement les valeurs 

. ce mode de comptage est à effectuer pour chaque croisement.

comptage sur le mot lecture

il simplifie le précédent et s'en déduit. en effet, sur le mot lecture les deux occurrences d'un même croisement représentent les deux passages par ce croisement[1]. la distance dans le mot de ces deux occurrences permet de calculer aisément les bouclets dans le sens direct pour la première occurrence et complémentée à 2 fois le nombre *c* de croisements de l'état, soit $2.c$, pour la seconde ; dans l'exemple, $b(a_2) = 22 - b(a_1)$, a_1, a_2 pouvant représenter les deux numéros de rang d'un croisement.
voici un des mots lecture avec les valeurs des bouclets selon une même direction. le calcul du bouclet de chaque croisement utilise la différence des rangs des deux occurrences du croisement.
pour la première occurrence a_1 : $b(a_1) = rg\ (a_2) - rg\ (a_1)$.
pour la seconde occurrence a_2 : $b(a_2) = 2.c - b(a_1) = 2c - rg(a_2) + rg(a_1)$, etc.

rangs :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
mot lecture :	**1**	*2'*	*3'*	**4**	*5'*	*6'*	**2**	*7'*	**8**	**5**	*9'*	**3**	*10'*	**11**	*4'*	**9**	**6**	*1'*	**7**	**10**	*11'*	*8'*
bouclets :	17	5	9	11	5	11	17	11	13	17	5	13	7	7	11	17	11	5	11	15	15	9

on vérifie qu'on a toujours b(*x'*) + b(**X**) = 22.
ainsi *1'* est au 18ème rang et **1** au 1er, d'où $18 - 1 = 17$; le mot étant circulaire, la lecture peut se faire dans le même sens pour la seconde occurrence en utilisant la circularité équivalente à la complémentation à *22*.
ex. : *2'* est au 2ème rang et **2** au 7ème, d'où $rg\ (\mathbf{2}) - rg\ (2') = 7 - 2$ ou $rg\ (2') - rg\ (\mathbf{2}) + 22 = 17$; etc.
parmi toutes ces bouclettes, certaines ont une valeur remarquable : celles pour lesquelles les bouclets sont identiques dans les deux directions pour les deux occurrences du croisement. ainsi des croisements [4], [6] et [7], les valeurs des bouclets sont *11*, c'est-à-dire $2.c/2 = c$. c'est comme s'ils étaient situés "au centre" de l'état puisque quel que soit le sens du parcours, la valeur de celui-ci est toujours identique à $2.c/2 = c$. en conséquence, un état peut posséder plusieurs "centres" différents. dans l'état dessiné ici, il y en a trois : les croisements [4], [6] et [7].

II. mots nœudiens, permutations nœudiennes

il s'agira ici uniquement des nœuds réduits à 1 rond.
les nœuds à plusieurs ronds entraînent un supplément de complication sans entacher la structure mise en évidence par les nœuds à 1 rond.

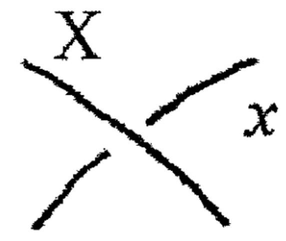
A. 1. *définition des mots nouables*

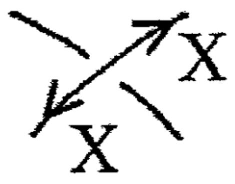
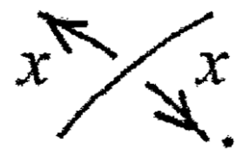
un état d'un nœud réduit comporte *c* croisements.
ces *c* croisements forment l'alphabet à partir duquel nous construisons les *mots nouables*.

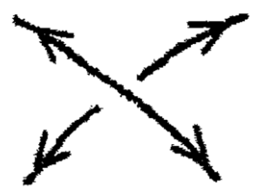
[1] bien que cela y ressemble, nous n'effectuons pas l'analyse à la manière de j.-p. benzécri ; voir les cahiers de l'analyse des données, vol. VIII – 1983 – n°4, pp. 439-458 : "graphe planaire et représentation sur une surface de genre quelconque pour une courbe à points multiples donnée par un schéma de gauss".

un croisement est fait d'une portion de brin *Dessus* et d'une portion de brin *dessous*. chaque croisement est désigné par une lettre, nous incluons les chiffres, de l'alphabet ; deux croisements sont désignés par deux lettres différentes.

ces lettres sont utilisées selon les deux casses, MAJUSCULE et minuscule. par exemple, [**b**] s'écrira B ou *b* et on énonce "[**b**] majuscule" ("*maj*" en abrégé) et "[**b**] minuscule" ("*min*" en abrégé).



et on dira  "lecture selon X *maj*" et  "lecture selon *x min*". à partir du centre fictif du croisement, on considèrera que chaque brin a deux directions  et . un croisement offre donc, *a priori*, quatre directions :



une fois les croisements de l'état assortis de la lettre qui les désigne, on pourra effectuer la lecture de l'état et écrire le mot correspondant[2], mot-lecture ou mot-écriture, en partant d'un croisement quelconque et en retournant à son caractère de départ. les mots ainsi construits sont donc cycliques.

- un mot est dit nouable s'il est construit avec autant de lettres différentes qu'il y a de croisements, soit *c*, selon les deux casses ; sa longueur est donc $l = 2.c = c_{maj} + c_{min}$.

2. *mots noués*

un mot nouable est noué si, de plus, la combinaison – dite aussi permutation – des lettres répond au système de conditions *COND*.

COND.

c est le nombre de croisements de lettres différentes chacune associée à un seul croisement, sans tenir compte de ses deux occurrences caractéristiques. ***c*** est donc la 1/2 longueur du mot-lecture.

alors

COND1. $c \geq 5\,p - 2$

c'est la forme que prend la formule *pnr*, page 154, pour un seul rond.

'p' est la séquence la plus longue de lettres différentes de même casse. ainsi A*xyz*B, *p* = 3 : "*xyz*". ABMK*axm*, *p* = 4 : "ABMK". 'p' est appelée portée maximum du mot.

COND2. non $(x\ \lambda\ X)$ *si* $\lambda < 2$

ce qui s'énonce : *il est interdit d'écrire une séquence telle que les deux casses de la lettre* [*x*] *soient séparées de moins de deux lettres différentes.*

explications :

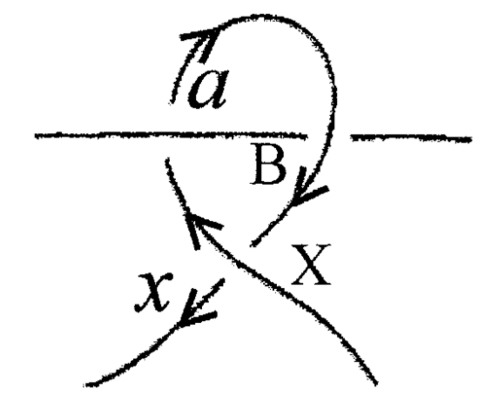
COND1 reprend la condition des portées nœudiennes.

deux croisements consécutifs sont alternés ou non alternés. ce fait s'exprime dans le mot-lecture par la contiguïté de lettres de casse identique ou non. si les deux croisements consécutifs sont

[2] ce qui suit peut se rattacher à la théorie des langages restreints de dyck – voir la note du paragraphe *rattachement encore aux trajets, et mots de profondeur des parenthèses*, p.21 . nous inversons la perspective : au lieu d'énoncer que les nœuds alternés à un rond sont des réalisations de mots restreints de dyck, nous disons que les langages formels sont des écritures des nœuds manifestement par leur jonction immédiate entre mots restreints de dyck et nœuds alternés à un rond.

alternés, les deux lettres correspondantes dans le mot-lecture sont de casse différente ; si les deux croisements sont non alternés, les deux lettres qui les représentent dans le mot-lecture sont de casse identique.

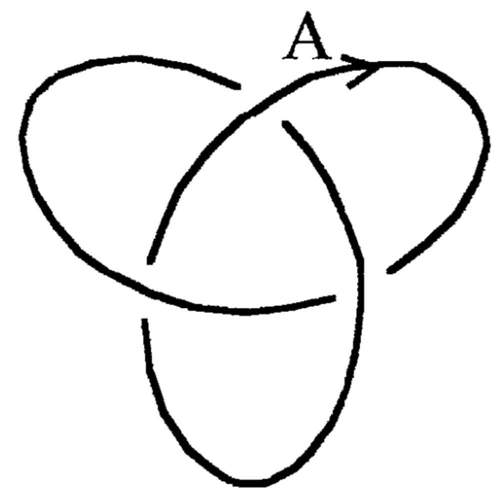
COND2 exprime que, quel que soit l'état, le plus petit chemin observable – et constructible ! – est celui de la boucle, soit la distance qui sépare le croisement [*x*] de lui-même, selon le mot X*a*B*x*.



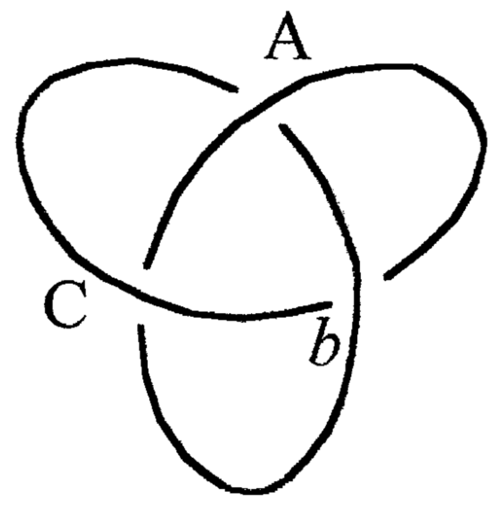
COND montre donc que le premier nœud à 1 rond est un nœud à 3 croisements.
montrons comment l'obtenir et qu'il n'y en a qu'un, le nœud trèfle.

procédure montante

on part du nœud[3] pour aboutir au mot-lecture.



on distingue les lettres à partir d'un croisement pris pour origine, ici le brin A (toute autre procédure peut être utilisée, il n'y a pas de standard d'attribution).



c) A *b* C *a* B *c* (A

les trois lettres utilisées sont [*a*] [*b*] [*c*] avec les casses manifestes A*b*C. nous construisons le mot-lecture à partir de A (par exemple). '*c*)' et '(A' rappellent que le mot est circulaire. la définition des casses rend l'utilisation d'une flèche indicatrice du sens de lecture superflue.

COND1 est respectée, puisque deux quelconques lettres voisines ne sont pas de casse identique. le mot, comme le nœud, n'est pas non alterné.

COND2 est respectée, puisque pour toute lettre, ses deux occurrences sont séparées par $\lambda \geq 2$.

- nous observons que les deux casses sont ***intriquées*** l'une dans l'autre. ce fait est fondamental, car avec *COND*, il nous permettra de construire des mots de longueur quelconque $l = 2.c$ en sachant positionner chaque lettre pour obtenir des mots nouables et noués.

dans notre lecture précédente, nous avons obtenu :

A*b*C*a*B*c*, dont nous pouvons dissocier les deux permutations de trois lettres selon leurs casses

A☐C☐B☐ et ☐*b*☐*a*☐*c*.

nous instrumentalisons ce fait dans la procédure inverse, dite procédure "descendante".

procédure descendante

soit à écrire un mot de trois lettres {[*a*], [*b*], [*c*]} noué, c'est-à-dire représentant un état noué.

1. nous écrivons les majuscules dans l'ordre alphabétique en ménageant un espace entre elles pour y insérer les minuscules :

[3] ici, le mot 'nœud' peut être utilisé à la place de 'état', car le nœud trèfle ne possède qu'un état.

A B C

entre A et B nous ne pouvons pas placer les minuscules correspondantes, car *COND2*, il ne reste donc que *c* :

A *c* B C

entre B et C nous ne pouvons placer ni *b* ni *c*, il reste *a* :

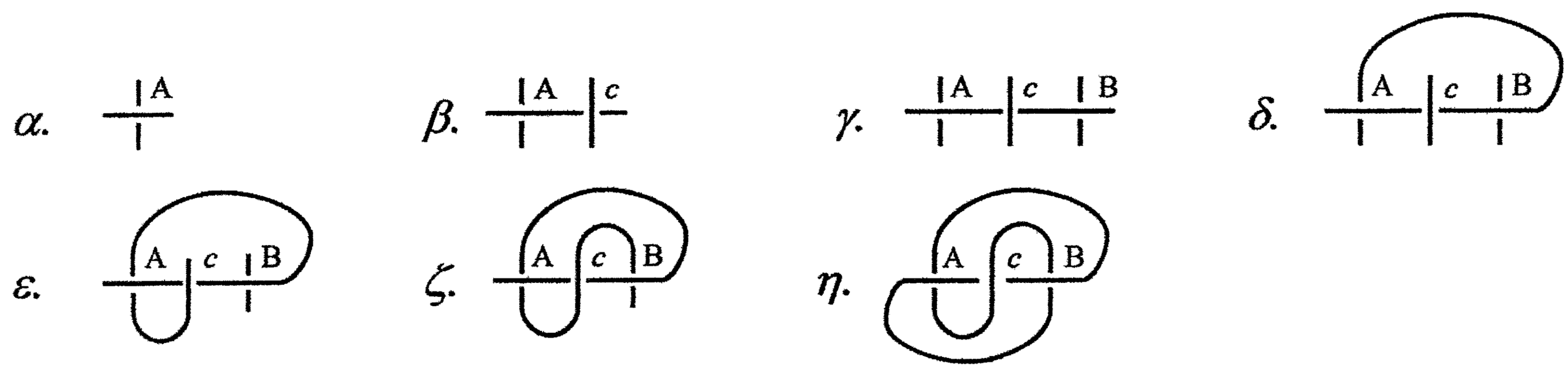
A *c* B *a* C

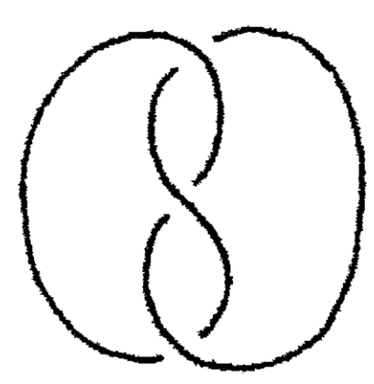
il reste donc *b* à placer entre C et A :

A *c* B *a* C *b*

voilà donc un mot qui s'écrit automatiquement car à aucun moment, compte tenu de *COND*, nous n'avons le choix.

2. passage du mot-lecture au dessin de l'état.



il s'agit bien du nœud trèfle  .

pour conserver la simplicité d'exposition, nous allons appliquer ces procédures au nœud simple qui vient immédiatement après le trèfle, le nœud dit **listing** à 4 croisements et donc à 4 lettres, soit un mot-lecture de longueur $l = 8$.

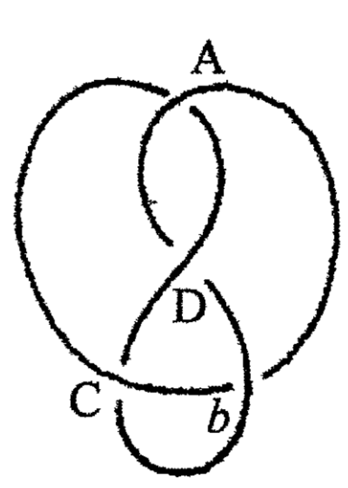
nous pouvons nous servir de ce nœud pour amener plusieurs remarques que nous avons passées sous silence avec le trèfle.

nous pouvons en effet exposer la procédure la plus abstraite valable désormais pour tous les états de nœud.

4 croisements, 4 lettres

voici le **listing**

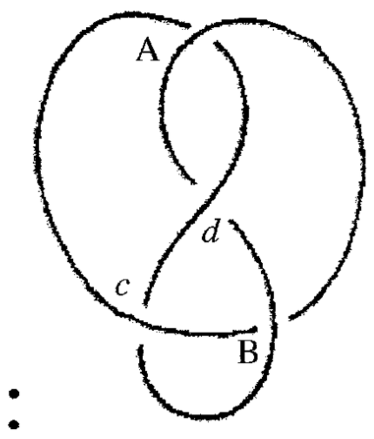
procédure montante :



le mot-lecture est : A *b* C *a* D *c* B *d*.

les casses {ABCD} se présentent dans l'ordre ACDB et les casses (*abcd*) dans l'ordre *bacd*.

cet ordre *maj* et *min* est produit par le sens de lecture. voyons un autre sens de lecture en changeant de direction pour A :

le mot-lecture est : 

A*d*B*c*D*a*C*b*, où les casses ont les ordres suivants : ABDC et *dcab*.

Les passages de $\begin{pmatrix} \text{ACDB} \\ \text{ABDC} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} bacd \\ dcab \end{pmatrix}$ sont de signature différente : *sign maj = 1* et *sign min = 2*.

la signature est le nombre canonique de permutations permettant de passer d'un mot à l'autre ; ACDB échange B et C pour passer à ABDC, A et D restant fixes. *bacd* échangeant *b* et *d* puis *a* et *c* ; on peut effectuer $b\ a\ c\ d \xrightarrow{-1} d\ a\ c\ b \xrightarrow{-2} d\ c\ a\ b$ ou $b\ a\ c\ d \xrightarrow{-1} b\ c\ a\ d \xrightarrow{-2} d\ c\ a\ b$.

procédure descendante :

soient les 4 lettres ABCD.
effectuons comme précédemment pour le trèfle :

A☐B☐C☐D☐

comment disposer les 4 lettres *abcd* ? ce nœud ne permet pas une construction automatique car plusieurs choix sont possibles, par exemple entre A et B, puisque nous pouvons y placer soit *c*, soit *d*. nous allons voir comment disposer le "calcul" plastique afin de procéder à toutes les possibilités de construction.

soit donc le mot ABCD. disposons-le comme précédemment.

A B C D

l'espace entre deux lettres recevra l'une des lettres minuscules de l'ensemble *abcd* ; mais comme il peut y avoir deux lettres concurrentes, nous disposons celles-ci dans l'ordre alphabétique sous l'espace vacant destiné à en recevoir une.

A B C D
c a a b
d d b c

la procédure s'effectue ainsi, simplement :

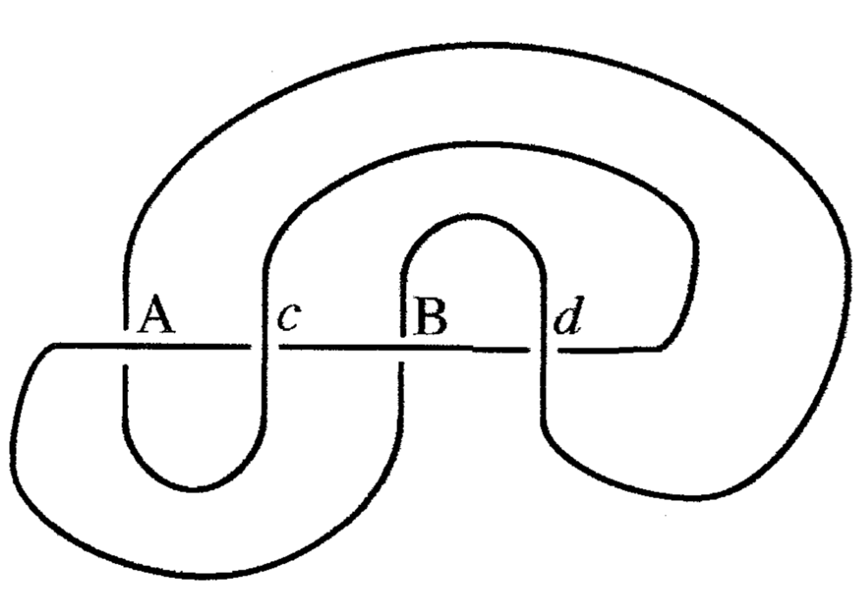
1. entre A et B, on choisit *c*, puis, entre B et C, on a le choix entre *a* et *d* ; on choisit d'abord *a*, puis, pour C et D, on choisit *b*, puisque *a* vient d'être utilisé. finalement on arrive à DA pour lesquels on a le choix entre *b* et *c* ; cependant aucune ne convient puisque déjà utilisées, on est donc obligé de "remonter", c'est-à-dire d'effectuer autant de pas en arrière qu'il est nécessaire pour trouver une combinaison utile.
2. c'est entre B et C qu'il faut revenir et choisir – on n'a pas le choix ! – la lettre *d*, puis on repart. entre C et D on a le choix entre *a* et *b* et l'on prendra *a* pour pouvoir choisir le pas d'après la lettre *b* qui n'a pas été utilisée.

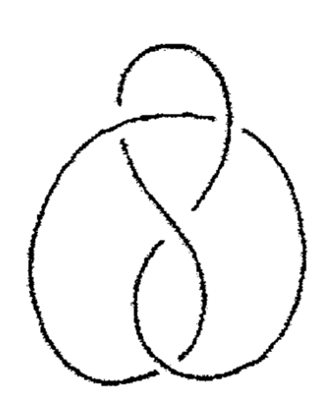
au final on obtient, en commençant par *c*, le mot *c d a b*, et le mot complet sera :

A *c* B *d* C *a* D *b*.

3. ce mot est-il noué ?

dessinons le dessin correspondant, comme en page 5, n°2 de la procédure descendante.



ce qui donne bien le **listing**  .

une autre combinaison se présentait. nous avions :

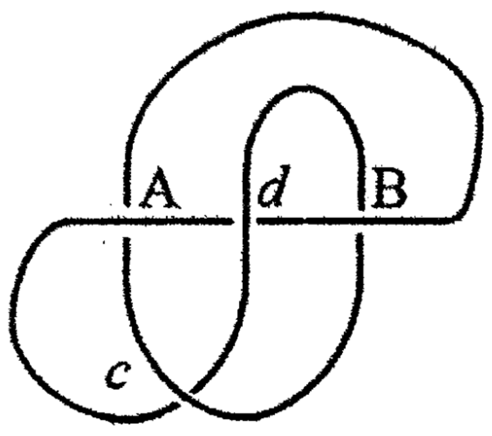
A B C D
c a a-b
d d b c

la seconde possibilité apparaît avec les lettres non reliées par un tiret :

A B C D
c a a b
d d b-c, soit le mot *d a b c*.

ce qui donne :

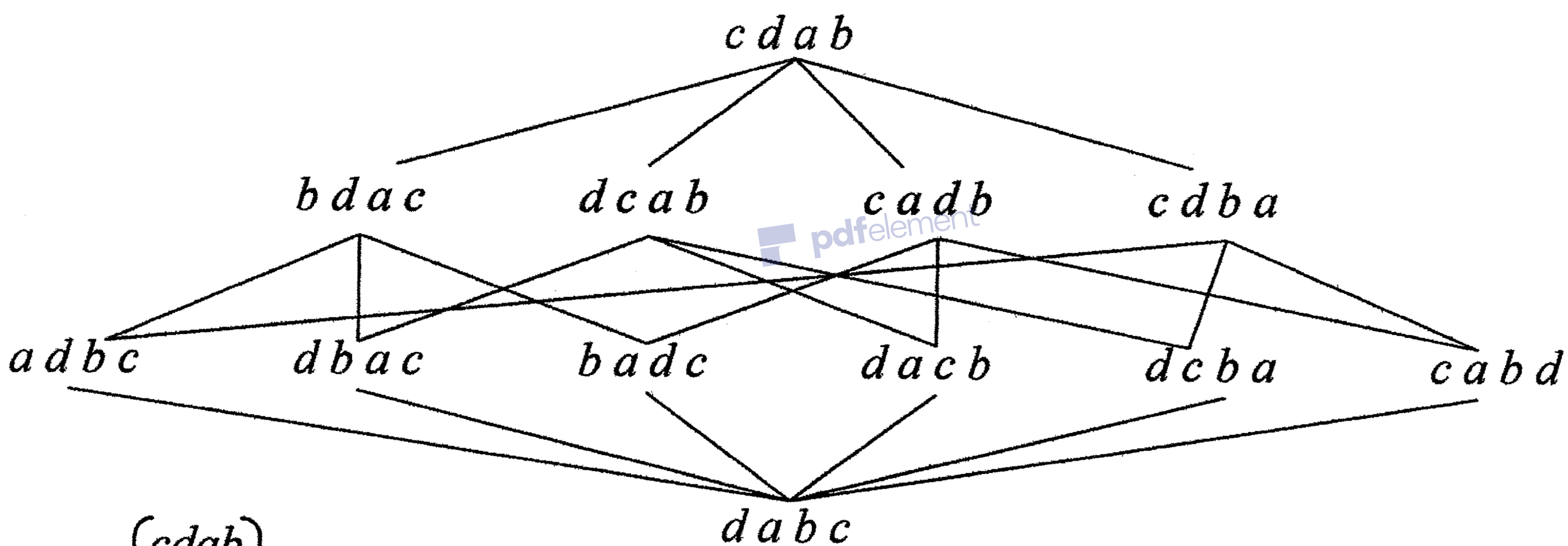
A *d* B *a* C *b* D *c*



ce qui donne bien le **listing** :

ces deux mots sont donc bien noués et l'on voit que toute autre combinaison respectant l'ordre de ABCD est innouable.

on est passé de *cdab* à *dabc*, c'est-à-dire, en fait, car aucun n'est le "début" de la procédure, qu'on passe de l'un à l'autre suivant les mouvements de permutation :



et donc $\text{sign}\begin{pmatrix} cdab \\ dabc \end{pmatrix} = 3$.

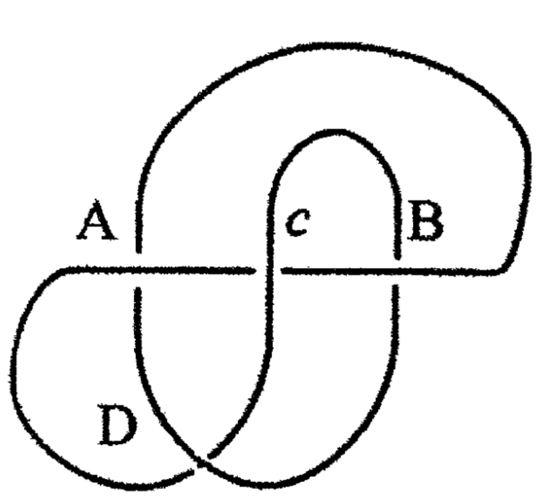
les lettres ABCD sont elles-mêmes susceptibles de permutation. effectuons-en une et appliquons à cette nouvelle combinaison toute la procédure précédente.

soit ABDC le nouveau mot.

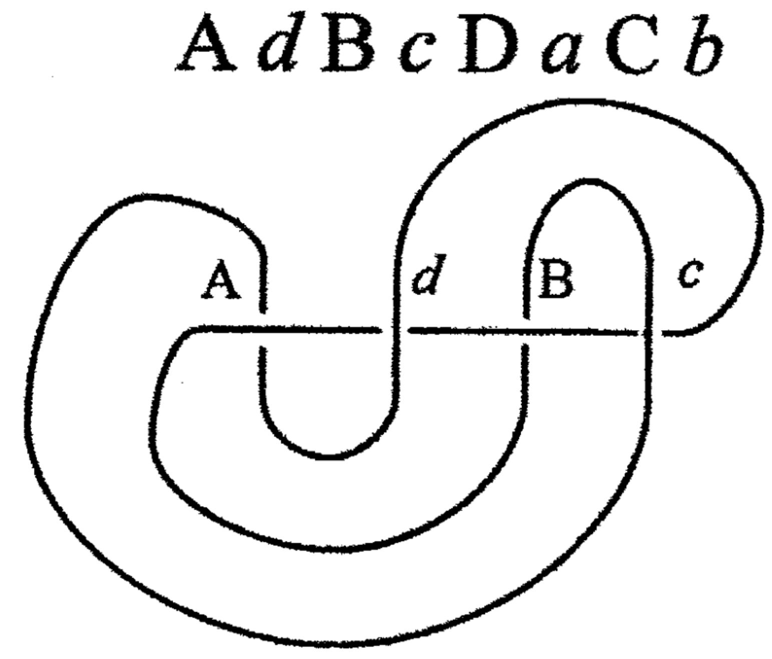
A B D C
$c-a \quad a-b$
$d-c \times b-d$

soient $\begin{pmatrix} cabd \\ dcab \end{pmatrix}$ et :

A *c* B *a* D *b* C *d*



A *d* B *c* D *a* C *b*



que nous reconnaissons.